

6. DEPENDENCIA LINEAL Y BASES.

6.1. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Dado un conjunto de m vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{R}^n$, se considera el sistema que tiene la siguiente expresión vectorial:

$$x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_m \mathbf{u}_m = \mathbf{0}$$

- Si el sistema es compatible indeterminado, se dice que el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es **linealmente dependiente**.
- Si el sistema es compatible determinado se dice que el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es **linealmente independiente**.

OBSERVACIÓN

Para ver si un sistema homogéneo es compatible determinado o compatible indeterminado, basta con calcular el rango de la matriz de coeficientes. Así, dado el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{R}^n$, sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, la matriz cuyas columnas son los vectores dados, entonces:

- Si $\text{rango}(A) < m$, se tiene que el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente.
- Si $\text{rango}(A) = m$, se tiene que el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente.

Se puede definir $\text{rango}(A)$ como el número máximo de vectores linealmente independientes, en el conjunto de los vectores columnas (o filas) de la matriz A .

EJEMPLO 6

Determinar si $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto linealmente dependiente o

independiente. En caso de ser linealmente dependiente obtener un conjunto de vectores más pequeño, que genere el mismo subespacio vectorial.

Solución:

Se calcula el rango de la matriz A cuyas columnas son los vectores dados:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $\text{rango}(A) = 2 < 5$, luego el conjunto es linealmente dependiente.

Además, la forma canónica por filas de la matriz A tiene los pivotes situados en las columnas primera y segunda, eso indica que los vectores situados en esas dos columnas de A , generan el mismo espacio que el conjunto de todas las columnas:

$$\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

6.2. BASES

Se llama **base** de un espacio (o subespacio) vectorial a un conjunto de vectores generador del espacio (o subespacio) y que es linealmente independiente

EJEMPLO 7

Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, determinar una base del espacio $\text{Col}(A)$, y otra base del espacio $\text{Nul}(A)$.

Solución:

En el ejemplo 6 se ha visto que $\text{Col}(A) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, así se tiene que $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

es un conjunto generador de $\text{Col}(A)$. Además, $\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$, por tanto el conjunto B_1

es linealmente independiente, de ambos resultados se deduce que B_1 es una base de $\text{Col}(A)$.

En el ejemplo 4 se vio que un conjunto generador de $\text{Nul}(A)$ es:

$$B_2 = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{además se puede comprobar fácilmente que}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, \text{ por tanto } B_2 \text{ es linealmente independiente. De ambos resultados}$$

se deduce que B_2 es una base de $\text{Nul}(A)$.

OBSERVACIÓN

Un espacio o subespacio vectorial puede tener muchas bases, pero todas sus bases tienen siempre el mismo número de elementos.

6.3. DIMENSIÓN

Se llama **dimensión** de un espacio o subespacio vectorial S , y se escribe **dim** (S), al número de elementos que tiene una cualquiera de sus bases.

EJEMPLO 8

Demostrar que el conjunto $B_c^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base del espacio \mathbb{R}^3 , y calcular la dimensión de \mathbb{R}^3 .

Solución:

Dado que la matriz cuyas columnas son los elementos de B_c^3 es la matriz identidad

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ su rango es 3, de donde se deduce que } B_c^3 \text{ es linealmente independiente, y}$$

todo sistema que tenga a I_3 por matriz de coeficientes será compatible determinado, por lo que B_c^3 es un conjunto generador de \mathbb{R}^3 , y por tanto base.

El número de elementos que tiene la base B_c^3 es 3, así que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Esta base recibe el nombre de base canónica de \mathbb{R}^3 .

6.4. BASES CANÓNICAS Y USUALES

6.4.1. BASE CANÓNICA DE \mathbb{R}^n

Se llama **base canónica** de \mathbb{R}^n , y se nota por B_c^n , al siguiente conjunto de n vectores:

$$B_c^n = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Y se tiene que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

OBSERVACIÓN

La base canónica de \mathbb{R}^n , tiene la característica de que al colocar sus vectores en columna en una matriz, se forma la matriz identidad I_n . No todos los subespacios vectoriales tienen una base con esas características, sin embargo, en todos los espacios y subespacios vectoriales se puede encontrar una base que al colocar sus vectores en columna en una matriz, se obtiene una matriz en forma canónica por columnas (o al colocar los vectores en filas se obtiene una matriz en forma canónica por filas). Dicha base recibirá en estas unidades el nombre de base usual del subespacio.

6.4.2. BASE USUAL DE UN SUBESPACIO VECTORIAL S

Sea $B_u^S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ una base del subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dirá que B_u^S es la **base usual** de S si al colocar sus vectores en una matriz por columnas, resulta una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times r}$ en forma canónica por columnas.

O bien, al colocar los vectores en una matriz por filas, resulta una matriz $A^t \in \mathcal{M}_{r \times n}$ en forma canónica por filas.

EJEMPLO 7B

Obtener la base usual del subespacio vectorial que tiene por base: $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Solución:

$$\text{base } B_1 \text{ en filas} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{base } B_u^S \text{ en filas}$$

$$B_u^S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$